Wykład 4
26 marca 2021
11:18

Charakteryzacja WWO jako kontraktywnego rzutu zachowującego jedynkę

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ - prz. z miarą skończoną ($\mu(\Omega) < \infty$)

Wtedy $1 = \mathbb{1}_\Omega \in L_1(\mu)$ (jedynka jest całkowalna)

Jeżeli $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ dowolna σ-podalgebra, to
$E(1 | \mathcal{G}) = 1$, bo 1 jest $\mathcal{G}$-mierzalna ($\Omega \in \mathcal{G}$)

Z wcześniejszego Tw. wynika, że

$\left(\begin{array}{l} E : L_1(\mu) \to L_1(\mu|\mathcal{G}) \subseteq L_1(\mu) \\ \text{WWO zadane przez pewną} \\ \sigma\text{-algebrę } \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \end{array} \right) \Rightarrow$ „ $\Leftarrow$ " $\left(\begin{array}{l} E : L_1(\mu) \to L_1(\mu) \text{ rzut} \\ \text{kontraktywny zachowujący} \\ \text{jedynkę, tzn.} \\ E^2 = E, \|E\| = 1, E(1) = 1 \end{array} \right)$

Teraz pokażemy „ $\Leftarrow$

$\boxed{\text{STW}}$ Niech $M \subseteq L_1(\mu)$.

$\left(\begin{array}{l} M \text{ domknięta lin. podprz.} \\ M \text{ podkrata } L_1(\mu) \\ \boxed{\{x, y \in M \to x \wedge y, x \vee y \in M\}} \\ 1 \in M \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} M = L_1(\mu|\mathcal{G}) \\ \text{dla pewnej } \sigma\text{-podalg.} \\ \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \end{array} \right)$

Dowód: „ $\Leftarrow$ " jasne ∎

„ $\Rightarrow$ " Pokażemy

?

$\mathcal{G} := \{A \in \mathcal{F} : \mathbb{1}_A \in \mathcal{M}\}$

Pokażemy, że $\mathcal{G}$ jest σ-algebrą

Z definicji $\mathcal{G}$ oraz stąd, że $L_1(\mu|\mathcal{G})$ jest generowana przez funkcje charakterystyczne otrzymujemy

$$L_1(\mu|\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{M} \quad \left(\begin{array}{l}\text{bo } \mathcal{M} \text{ jest} \\ \text{domknięty przez. liniowo}\end{array}\right)$$

W drugą stronę, chcemy pokazać, że jeśli $f \in \mathcal{M}$ to f jest $\mathcal{G}$-mierzalna. Wystarczy to pokazać dla funkcji nieujemnej, gdyż

$$f = f^+ - f^-, \text{ gdzie } f^+ = \underset{\in \mathcal{M}}{f} \vee \underset{\in \mathcal{M}}{0} \in \mathcal{M} \quad \left(\begin{array}{l}\text{bo } \mathcal{M} \\ \text{krata}\end{array}\right)$$

$$f^- = -(\underset{\in \mathcal{M}}{f} \wedge \underset{\in \mathcal{M}}{0}) = (-f) \vee 0 \in \mathcal{M}$$

oraz

f $\mathcal{G}$-mierzalna $\iff$ f^+, f^- są $\mathcal{G}$-mierzalne

Załóżmy zatem, że $f \geq 0$. $(\mathbb{F} = \mathbb{R})$

Funkcja f jest $\mathcal{G}$-mierzalna $\iff \forall_{\lambda > 0} \{t : f(t) > \lambda\} \in \mathcal{G}$

$f(t) - \lambda > 0$

W tym celu rozważmy ciąg funkcji

$$h_n := [n(\underset{\in \mathcal{M}}{f} - \underset{\in \mathcal{M}}{\lambda \mathbb{1}})]^+ \wedge \underset{\in \mathcal{M}}{\mathbb{1}} \in \mathcal{M}$$

Zauważmy, że

$$h_n \nearrow h := \mathbb{1}_{\{t : f(t) - \lambda > 0\}}$$

Stąd

$$h_n \xrightarrow{L_1(\mu)} \mathbb{1}_{\{t : f(t) > \lambda\}} \in M$$

$h_n \uparrow_m$ (bo M domknięte)

Zatem $\{t : f(t) > \lambda\} \in \mathcal{G}$. Czyli f jest $\mathcal{G}$-mierzalna.

Stąd

$$M = L_1(\mu|_{\mathcal{G}}).$$ ∎